Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ABM

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsabm.fr/assets/annales/bts-abm/E2 - Mathématiques/2023/BTS ABM - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation de la fermeture d'un tiroir

La distance entre le fond du tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie une équation différentielle associée au mouvement, puis les variations de la distance, le seuil de fermeture et sa valeur moyenne.

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

On factorise : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Le produit est nul si l'un des facteurs est nul.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. **À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.**

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes. D'après le tableau fourni, les solutions de l'équation différentielle sont les combinaisons linéaires des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. **À partir de la situation initiale décrite, déterminer f(0) et f'(0).**

La distance initiale vaut 20 cm, donc $f(0) = 20$. Comme la distance diminue à la vitesse de $-10 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$, sa dérivée initiale vaut -10.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20 \text{ cm}$ et $f'(0) = -10 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$.

Question 2.b. **En utilisant l'expression de f(t) fournie, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On substitue $t = 2$ dans l'expression fournie : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression donne environ $3{,}1567$ cm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Le constructeur affirme qu'il est fermé en moins de 4 secondes. Dire s'il a raison et justifier.**

La fonction f est continue, avec $f(0) = 20 > 0{,}5$ et $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}4274 < 0{,}5$. Elle prend donc la valeur $0{,}5$ à un instant strictement compris entre 0 et 4 secondes. Le seuil de fermeture est atteint avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B : Étude de fonction

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour l'exponentielle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Lorsque $t \to +\infty$, les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. Leur combinaison linéaire tend donc également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C de f possède une asymptote et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 0. La courbe représentative possède donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

En utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$, la dérivée du premier terme est $-\frac{70}{3}e^{-t}$, et celle du second est $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Puisque $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ est 0.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 0

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en indiquant t, la valeur de f(t) arrondie au centième et la valeur de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.**

On calcule $f(t)$ à chaque ligne et on teste si la valeur est strictement supérieure à $0{,}5$. À la ligne 39, la condition devient fausse : l'algorithme s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$.

Question 3.b. **Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

La boucle s'arrête à $t = 3{,}9$ s, car $f(3{,}9) \approx 0{,}47$ cm n'est plus supérieur à $0{,}5$ cm. Selon le critère de l'énoncé, le tiroir est alors fermé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer l'expression de m donnée dans le sujet.

On intègre les deux exponentielles sur $[0;4]$, puis on divise par 4 :

$$m = \frac{1}{4}\left[\frac{70}{3}(1-e^{-4}) - \frac{10}{12}(1-e^{-16})\right].$$

En réduisant les termes constants et en développant, on obtient l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$.

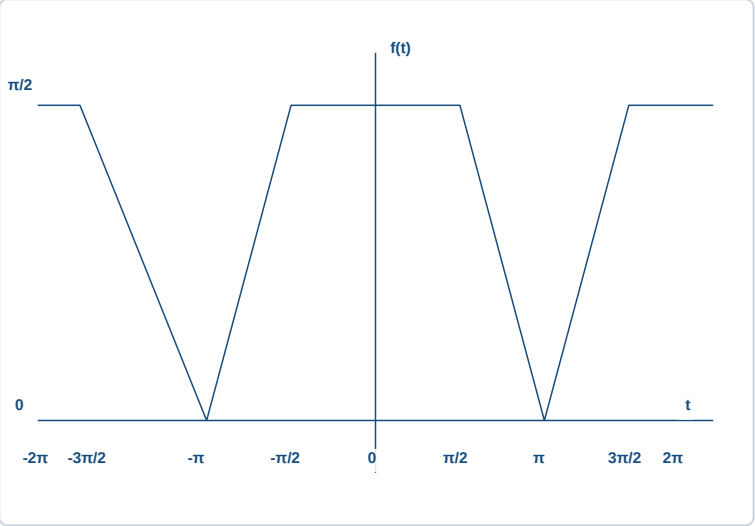
2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire

On étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π] : elle vaut π/2 sur [0 ; π/2[puis π - t sur [π/2 ; π]. Les questions portent sur son tracé, ses coefficients de Fourier, le polynôme de Fourier d'ordre 3 et l'erreur d'une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition et de sa périodicité.

Sur chaque période, la fonction est constante à $\pi/2$ de $-\pi/2$ à $\pi/2$, puis décroît jusqu'à 0 en π. Par parité, elle croît de 0 en $-\pi$ jusqu'au plateau. Répéter ce motif tous les 2π sur l'intervalle demandé.

Tracé de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Plateaux à $\pi/2$; minima nuls en $-\pi$ et π. Motif de période 2π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction f est paire et $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur $[-\pi;\pi]$ est nulle. Or $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La période vaut $T = 2\pi$. D'après la formule du formulaire, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.

Sur $[0;\pi]$, on intègre les deux expressions de f. La fonction étant paire et de période 2π, l'intégrale sur une période est le double de celle sur $[0;\pi]$.

Étape	Calcul
Intégrale sur $[0;\pi]$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt = \frac{3\pi^2}{8}$
Coefficient moyen	$a_0 = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \frac{3\pi^2}{8} = \frac{3\pi}{8}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

La formule du formulaire pour une fonction paire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Ici $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, donc $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$.

En séparant l'intégrale en $\pi/2$, selon les deux expressions de f, puis en simplifiant le premier terme, on obtient :

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. En utilisant l'expression de a_n donnée dans le sujet, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On applique la formule donnée dans le sujet, $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$, aux trois premiers indices.

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. Déduire les coefficients obtenus que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

Comme tous les coefficients b_n sont nuls, $s_3(t) = a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t)$. En remplaçant par les coefficients déterminés précédemment :

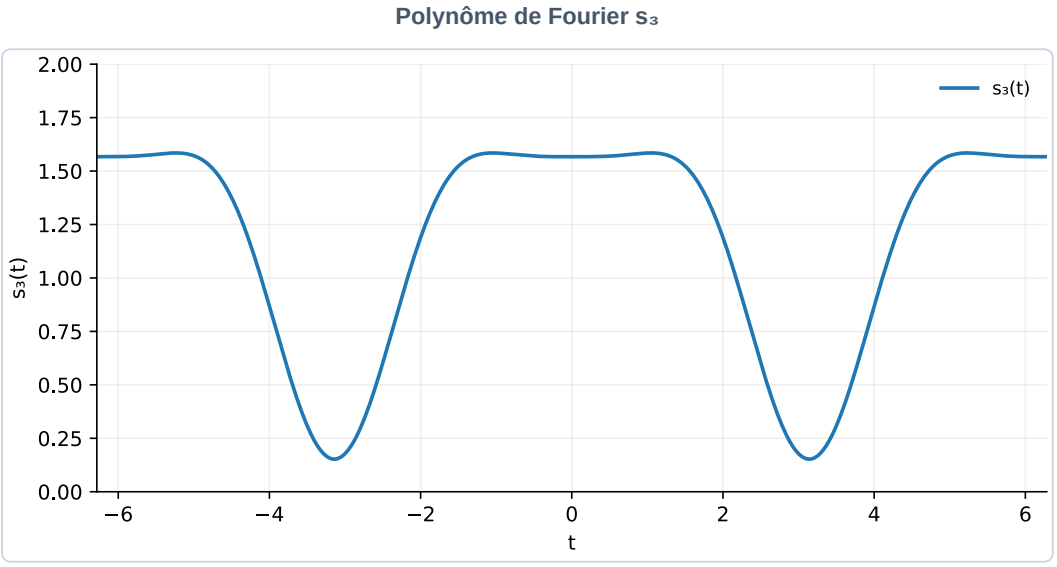
$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. Sans justifier, indiquer laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

Le polynôme est périodique, avec des maxima près de 0 et des minima près de $\pm\pi$. La courbe numéro 3 présente cette forme.



Le tracé calculé correspond à la courbe numéro 3 du sujet.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

En substituant les coefficients dans la définition de P, on obtient :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}.$$

À 10^{-4} près, $P \approx 1{,}6437$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. Sachant que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F², choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur correspondant. Une seule réponse est attendue, sans justification.

L'erreur relative est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$, avec $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$. Elle vaut environ $0{,}07394\,\%$, ce qui correspond au choix $0{,}1\,\%$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, groupement B, code 23MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, portent sur la fermeture d'un tiroir modélisée par une équation différentielle et l'étude de Fourier d'une fonction périodique paire.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- Si $f'(t) < 0$ sur un intervalle, alors f y est strictement décroissante.
- Pour une fonction paire de période T, $b_n = 0$ et $a_n = 4/T \int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La pulsation d'une fonction périodique de période T est $\omega = 2\pi/T$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance initiale f(0) de la vitesse initiale f'(0), et respecter le signe de cette dernière.
- Dans le tableau de variations, indiquer f(0), le sens de variation et la limite en $+\infty$.
- Pour l'algorithme, suivre l'ordre des tests et incréments, puis repérer la première condition fausse.
- Pour l'erreur d'approximation, comparer P à F^2 et exprimer l'erreur relative en pourcentage.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

Résoudre d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la forme générale de la solution. Utiliser ensuite les conditions initiales f(0) et f'(0) pour déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice de Fourier ?

La fonction étudiée est paire. Dans le calcul de b_n, le produit de cette fonction paire par sin(nt), qui est impaire, est impair. Son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle, donc $b_n = 0$.

Q : Comment trouver la valeur finale de t dans l'algorithme ?

Partir de t = 0, puis augmenter t de 0,1 tant que f(t) est supérieure à 0,5. La boucle s'arrête à la première valeur pour laquelle la condition est fausse, à interpréter comme un temps de fermeture selon le seuil fixé.

Q : Quels éléments sont attendus pour les questions de Fourier ?

Appliquer les formules du formulaire en tenant compte de la période et de la parité, puis conserver des valeurs exactes pour les coefficients demandés. Pour le choix multiple sur l'erreur, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsabm.fr/assets/annales/bts-abm/E2 - Mathématiques/2023/BTS ABM - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Analyses de Biologie Médicale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.