Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ABM

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d'un système électrique (9 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsabm.fr/assets/annales/bts-abm/E2 - Mathématiques/2022/BTS ABM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation du freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t) est étudiée au cours du temps. Les questions portent sur une équation différentielle, les variations et la limite de la vitesse, la distance parcourue et le développement limité de f au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

Pour l'équation homogène $y' + 0{,}8y = 0$, la formule donne $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ vérifie $g'(t) = 0$. Ainsi, $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$ pour tout t. Elle est donc solution de l'équation (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière de (E) est $g(t) = 5$. Toute solution de (E) s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, soit $ke^{-0{,}8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = 5 + k = 20$. Comme $e^0 = 1$, on obtient $k = 20 - 5 = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $f(t)$ tend vers 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

Comme $f(t)$ tend vers 5 lorsque $t \to +\infty$, la courbe représentative C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante, de sa valeur initiale 20 vers sa limite 5.

t	0	+∞
$f'(t)$	−	
$f(t)$	20	↘ 5

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0 ; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout temps fini, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) > 5$. La vitesse tend vers 5 m·s⁻¹ sans atteindre 0 : selon ce modèle, le chariot ne s'arrête pas.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers 5 m·s⁻¹.

Question 4.a. **Vérifier que la fonction F définie par $F(t) = -18{,}75e^{-0,8t} + 5t$ est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant, $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est égale à $f(t)$, donc F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **En utilisant l'intégrale donnée pour la distance parcourue, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. En remplaçant par l'expression de F, on obtient $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}$. L'évaluation numérique, arrondie au centimètre, donne 15,33 m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8} \approx 15{,}33\ m$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme de Taylor affiché est $20 - 12t + (24/5)t^2$. À l'ordre 2, le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. C'est donc la proposition comportant ce reste qui convient.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + (24/5)t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

La tangente en 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. On obtient l'équation demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d’un système électrique

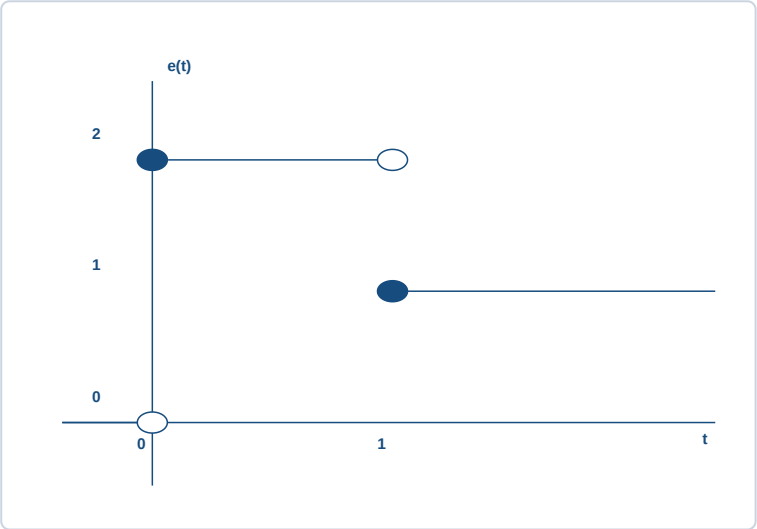
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). Il faut représenter l’entrée, utiliser les transformées de Laplace pour déterminer la sortie, puis étudier son expression, son tracé et sa limite.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme le signal de sortie est causal, il vaut zéro avant l’origine. En utilisant la définition de l’échelon, il vaut ensuite 2 jusqu’à l’instant 1 exclu, puis 1 à partir de cet instant. Sur le tracé, les points pleins représentent les valeurs prises aux instants de saut, et les points vides les valeurs exclues. Les segments horizontaux représentent les paliers du signal.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

Le formulaire donne $\mathcal{L}(U(t)) = 1/p$ et $\mathcal{L}(U(t-1)) = e^{-p}/p$. On applique la linéarité à $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$: on transforme chaque échelon, en gardant son coefficient et son signe. La somme obtenue est la transformée de Laplace du signal d’entrée.

$$E(p) = 2\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − (1/[p(p + 1)])e⁻ᵖ.

1. Par définition de la fonction de transfert, $S(p) = H(p)E(p)$.
2. On remplace par $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$.
3. En distribuant le facteur $1/(p+1)$, on sépare les termes direct et retardé. On obtient bien l'expression demandée :

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

Pour vérifier l'égalité, mettons les deux fractions du membre de droite au même dénominateur. Le dénominateur commun est $p(p+1)$, et le numérateur devient $(p+1) - p$, soit 1. On retrouve donc exactement le membre de gauche. Cette décomposition est ensuite utile pour déterminer les transformées inverses dans la question suivante.

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées inverses de Laplace de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de (1/(p + 1))e⁻ᵖ.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

Les deux premières inverses correspondent directement aux fonctions du formulaire. Pour les deux autres, le facteur e^{-p} traduit un retard d'une unité : on remplace t par $t-1$, puis on multiplie par $U(t-1)$ pour annuler la fonction avant $t = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

En utilisant la décomposition de la question précédente, on écrit $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Le terme retardé a pour facteur $U(t-1)$ après transformation inverse et s'annule donc pour $t < 1$. Sur l'intervalle demandé, seul le terme direct reste à considérer.

1. Pour $0 \leq t < 1$, $U(t) = 1$.
2. Donc $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $t \in [0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e − 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), en donnant la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

On substitue $t = 1$ dans l'expression donnée : $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, on obtient $s(1) = 2 - 2/e$. Numériquement, cela vaut environ $1{,}2642$, donc l'arrondi au dixième est $1{,}3$. Cette valeur est aussi la limite de l'expression de $s(t)$ sur $[0;1[$ lorsque t tend vers 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

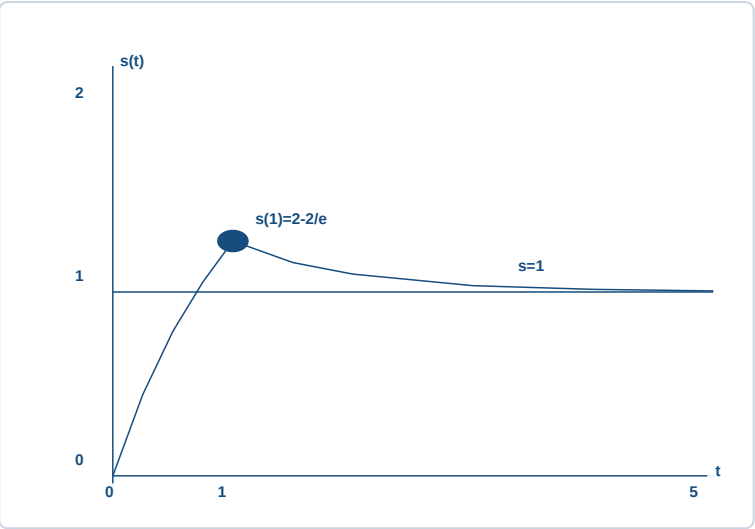
$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$ au dixième.

Question 5.b. Compléter sur le document-réponse à rendre avec la copie la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, la sortie suit $2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 à $2 - 2/e$. À partir de $t = 1$, elle suit $(e-2)e^{-t} + 1$, qui décroît vers 1 puisque $e - 2 > 0$. Les deux expressions coïncident en $t = 1$, donc la courbe se raccorde sans saut.

- Départ : $(0;0)$.
- Raccordement : $(1;2 - 2/e)$.
- Asymptote horizontale : $s = 1$.

Courbe de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe part de $(0;0)$, passe par $(1;2-2/e)$, puis décroît vers $s=1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$.

Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme e^{-t} tend vers 0. Le coefficient $e-2$ est constant, donc le produit $(e-2)e^{-t}$ tend aussi vers 0. La limite de la fonction est alors le terme constant de l'expression ci-dessus.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, groupement B, code 22MATGRB2, durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, en mobilisant équations différentielles, étude de fonction, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$; pour un second membre constant, on ajoute une solution particulière.
- Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et donne l'asymptote horizontale $y = 5$.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{[t_0,t_1]} f(t)dt$.
- La transformée de Laplace de $U(t - a)$ est e^{-ap}/p ; un retard temporel introduit donc un facteur exponentiel.

Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir déterminé la famille des solutions de l'équation différentielle, appliquer la condition initiale pour fixer la constante.
- Justifier les variations à partir du signe de la dérivée et distinguer une vitesse qui tend vers zéro d'un arrêt effectif.
- Pour calculer une distance, évaluer une primitive aux deux bornes, garder la valeur exacte puis arrondir au centimètre.
- Pour les signaux, respecter les instants de changement, les conventions de causalité et les tracés demandés sur le document-réponse.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la constante dans la solution de l'équation différentielle ?

On ajoute une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène. On remplace ensuite t par 0 et on impose $f(0) = 20$ pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot entre deux instants ?

On intègre la fonction vitesse entre les deux instants. Si F est une primitive de f, la distance vaut $F(t_1) - F(t_0)$. On conserve d'abord la valeur exacte, puis on arrondit au centimètre.

Q : Comment organiser les deux exercices pendant les deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices indépendants de 10 points chacun. Répartissez le temps selon votre aisance, réservez-en pour les tracés sur le document-réponse, puis vérifiez les unités et les arrondis demandés.

Q : Que faut-il vérifier pour obtenir les points sur les tracés et les calculs ?

Respectez les intervalles et les consignes de tracé, donnez les valeurs exactes puis approchées lorsqu'elles sont demandées, et justifiez les questions qui le requièrent. Pour le QCM, une seule réponse est à recopier sans justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsabm.fr/assets/annales/bts-abm/E2 - Mathématiques/2022/BTS ABM - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Analyses de Biologie Médicale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.