Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS ABM

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et calcul intégral (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse (13 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btsabm.fr/assets/annales/bts-abm/E2 - Mathématiques/2018/BTS ABM - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d’un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et calcul intégral

L’exercice modélise le départ d’un wagon à propulsion électromagnétique et vérifie l’objectif d’atteindre 400 km/h en moins de deux minutes. Il étudie la distance parcourue par une équation différentielle, une fonction et une aire liée à l’aménagement d’une gare.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0. La formule générale pour une équation de la forme y' + ay = 0 est fournie.

On écrit l’équation sous la forme donnée avec $a = -0,2$. Ainsi, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On dérive g : $g'(t) = -15$. Alors $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = 3t$, ce qui est bien le second membre de l’équation différentielle. Donc g est une solution.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$: g est une solution.

Question 3°. En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Les solutions de l’équation complète s’obtiennent en ajoutant à la solution particulière $g(t) = -15t - 75$ les solutions de l’équation homogène trouvées à la question précédente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Le wagon étant au point de départ à t = 0, déterminer la solution f de l’équation différentielle vérifiant la condition initiale f(0) = 0.

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En remplaçant cette constante, on obtient la fonction distance du wagon.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). Pour f(t) = 75(e^(0,2t) - 1) - 15t sur [0, 3], résoudre l'inéquation f'(t) ≥ 0 sur cet intervalle. Les expressions de f et de f' fournies par le logiciel de calcul formel sont admises.

Le logiciel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, donc à $t \geq 0$. Cette condition est vérifiée sur tout l'intervalle étudié.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) \geq 0$ sur $[0, 3]$, avec égalité seulement en $t = 0$.

Question 1° b). Déduire du signe de f' les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 3].

t	**0**	**3**
Signe de $f'(t)$	0	+
Variation de f	$f(0) = 0$	$f(3) \approx 16,659$

La dérivée est positive sur $]0, 3]$: f est croissante sur $[0, 3]$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est croissante de 0 à environ $16,659$ sur $[0, 3]$.

Question 2°. Sachant que f(t) donne en kilomètres la distance parcourue à l'instant t exprimé en minutes, déterminer la distance parcourue au bout d'une minute et arrondir au dixième.

Au bout d'une minute, $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,605$ km. Arrondi au dixième, cela donne la distance parcourue demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$1,6$ km.

Question 3° a). La vitesse du wagon en kilomètres par minute à l'instant t correspond à f'(t). Déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

La vitesse vaut $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. À deux minutes, elle est donc égale à $15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$ km/min, soit $7,4$ km/min au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $7,4$ km/min.

Question 3° b). Déterminer si l'objectif des ingénieurs est atteint, sachant qu'il faut atteindre une vitesse instantanée de 400 km/h en moins de deux minutes. Justifier la réponse à partir de la vitesse déterminée à la question précédente.

Le seuil de 400 km/h correspond à $400/60$ km/min. En résolvant $15(e^{0,2t} - 1) = 400/60$, on obtient $t = 5\ln(13/9) \approx 1,839$ minute, donc avant deux minutes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le seuil est atteint après environ $1,839$ minute, soit moins de deux minutes.

Question 4°. Choisir, sans justification, parmi les trois propositions du sujet l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte.

La tangente en $t = 2$ s'écrit $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. Parmi les trois propositions, c'est la troisième.

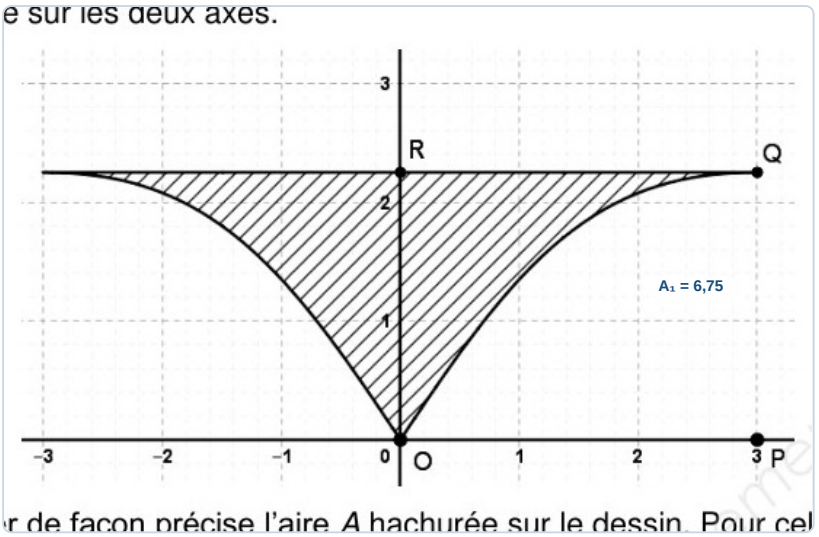
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. À partir du schéma de la pièce, choisir sans justification, parmi 3 u. a., 5,25 u. a. et 6,75 u. a., l'aire A1 du rectangle OPQR.

Le rectangle $OPQR$ a pour largeur $OP = 3$ et pour hauteur $OR = 2,25$. Son aire vaut donc $3 \times 2,25 = 6,75$ unités d'aire. C'est la troisième proposition.

Aire du rectangle OPQR



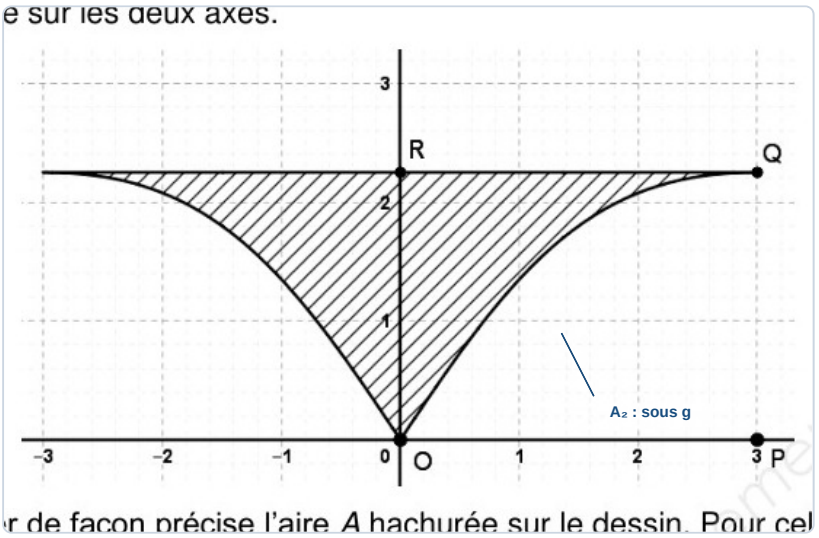
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie pour g(x) = 27x/(2x² + 18), calculer l'aire A2 de la région limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

Comme $g(x) \geq 0$ sur $[0, 3]$, l'aire vaut $A_2 = \int_0^3 g(x)\,dx$. Avec la primitive fournie, $A_2 = \frac{27}{4}[\ln(x^2+9)]_0^3 = \frac{27}{4}\ln 2$.

Aire sous la courbe g



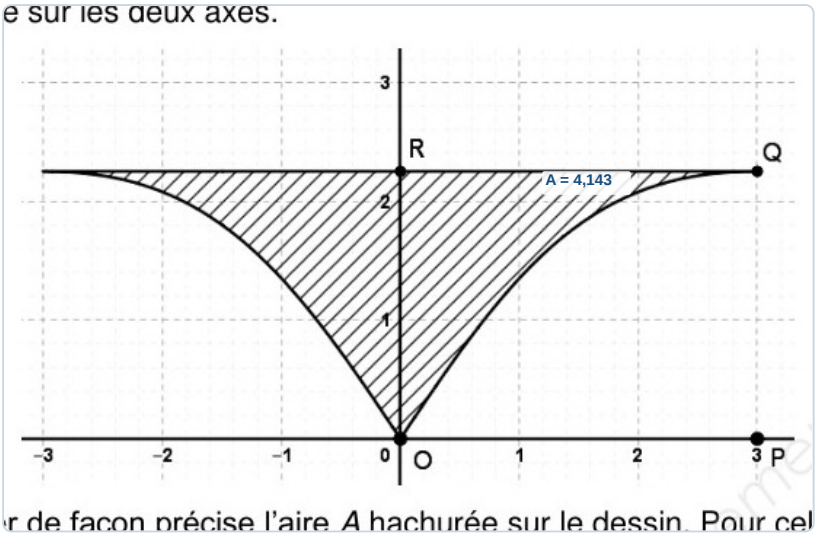
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. En utilisant les résultats précédents et la symétrie de la pièce par rapport à l'axe des ordonnées, déduire l'aire hachurée A et l'arrondir au millième.

Sur la moitié droite, la partie hachurée correspond au rectangle moins l'aire sous la courbe : $A_1 - A_2$. Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, $A = 2(A_1 - A_2) = 2(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2)$.

Aire hachurée totale



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse

L'exercice étudie les obsolescences technique et logicielle sur une population de smartphones, puis le nombre de téléphones non réparables dans des lots de modèle A. Il se termine par un test bilatéral sur l'affirmation selon laquelle 55 % des personnes pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données sur les 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant les appareils touchés ou non par l'obsolescence technique et ceux touchés ou non par l'obsolescence logicielle. Les données indiquent 3 % de smartphones touchés par l'obsolescence technique, 8 % par l'obsolescence logicielle et, parmi ces derniers, 12,5 % touchés aussi par l'obsolescence technique.

La population compte 200 smartphones. L'obsolescence technique concerne 3 % de 200, soit 6 appareils ; l'obsolescence logicielle en concerne 8 %, soit 16. Parmi ces 16 appareils, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2. Les autres cases s'obtiennent en retranchant ces effectifs aux totaux correspondants : 4 appareils touchés uniquement par T, 14 uniquement par L, et 180 par aucune des deux formes.

Smartphones	Touchés par L	Non touchés par L	Total
Touchés par T	2	4	6
Non touchés par T	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau des effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs du tableau : 2, 4, 6 ; 14, 180, 194 ; totaux 16, 184 et 200.

Question 2°. Pour un smartphone prélevé au hasard, avec T l'événement « le smartphone est touché par l'obsolescence technique » et L l'événement « le smartphone est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et P_L(T), la probabilité de T sachant L.

Les proportions de l'énoncé donnent directement les probabilités des événements T et L. Ainsi, 3 % des smartphones sont touchés par l'obsolescence technique, et 8 % par l'obsolescence logicielle. La probabilité conditionnelle demandée porte uniquement sur les smartphones touchés par L : parmi eux, 12,5 % sont également touchés par T. On transcrit ces trois fréquences en nombres décimaux pour obtenir les probabilités demandées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T) = 0,03$, $P(L) = 0,08$, $P_L(T) = 0,125$.

Question 3° a). Calculer P(T ∩ L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par les deux formes d'obsolescence.

Pour obtenir la probabilité que les deux événements se réalisent ensemble, on utilise la probabilité de L et la probabilité de T sachant L. La relation conditionnelle est $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. Ici, l'intersection représente les smartphones concernés à la fois par l'obsolescence logicielle et par l'obsolescence technique. On multiplie donc la proportion touchée par L par la proportion de ceux-ci touchée aussi par T.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0,08 \times 0,125 = 0,010$, soit 1 %.

Question 3° b). Calculer P(T ∪ L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins l'une des deux formes d'obsolescence.

L'événement $T \cup L$ regroupe les smartphones touchés par au moins une forme d'obsolescence. En additionnant $P(T)$ et $P(L)$, les appareils touchés par les deux formes sont comptés deux fois. Il faut donc retrancher une fois la probabilité de l'intersection, calculée à la question précédente. La formule de l'union donne alors directement la proportion recherchée dans la population étudiée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0,03 + 0,08 - 0,01 = 0,10$, soit 10 %.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

On cherche maintenant la probabilité de L parmi les smartphones déjà touchés par T. La population de référence est donc l'événement T, et non l'ensemble des smartphones. Par définition, une probabilité conditionnelle se calcule en divisant la probabilité de l'intersection par la probabilité de l'événement conditionnant. Les valeurs obtenues précédemment donnent l'intersection et la probabilité de T nécessaires à ce calcul.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = \frac{0{,}01}{0{,}03} = \frac{1}{3} \approx 0,333$, soit 33,3 %.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50 appareils prélevés avec remise, suit une loi binomiale, puis déterminer ses paramètres. Dans le stock, 4,5 % des appareils sont non réparables.

Chaque prélèvement constitue une épreuve de Bernoulli : le smartphone tiré est non réparable avec la probabilité $p = 0,045$, ou réparable avec la probabilité complémentaire. Le stock est suffisamment important pour assimiler les prélèvements à des tirages avec remise ; les épreuves sont donc indépendantes et leur probabilité de succès reste constante. La variable X compte les appareils non réparables parmi les 50 tirages : elle suit une loi binomiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous les appareils soient réparables.

Le lot est entièrement réparable si et seulement s'il ne contient aucun smartphone non réparable, donc si $X = 0$. La probabilité qu'un appareil soit réparable est $1 - 0,045 = 0,955$. Comme le prélèvement est assimilé à 50 tirages indépendants, la probabilité que chaque appareil du lot soit réparable est le produit de ces 50 probabilités identiques. On calcule ainsi la probabilité demandée puis on l'arrondit au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 0) = 0,955^{50} \approx 0,100$.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme donné, qui additionne les probabilités P(X = i) pour i allant de 0 à 3, puis compléter le tableau avec P(X = i) et la valeur cumulée S à chaque étape.

L'algorithme calcule successivement $P(X = i)$ pour $i = 0, 1, 2, 3$, puis ajoute chaque terme à la somme précédente. Les probabilités affichées et les sommes cumulées sont arrondies au millième ; pour calculer les cumuls, on additionne les valeurs non arrondies. Après la dernière étape, la somme correspond à la probabilité que le lot comporte au plus trois smartphones non réparables.

i	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = i)$: 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Cumuls S : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte du nombre de smartphones non réparables dans le lot.

La boucle fait varier i de 0 à 3 et ajoute à chaque passage la probabilité correspondante à la variable S. À la fin, S est donc la somme des probabilités des événements $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ et $X = 3$. Ces événements étant incompatibles, cette somme est la probabilité que le lot contienne au maximum trois smartphones non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$S \approx 0,813$: environ 81,3 % des lots comptent au plus 3 smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est le produit np. Ici, chaque lot comprend 50 smartphones et la probabilité qu'un appareil soit non réparable vaut 0,045. Le calcul donne le nombre moyen d'appareils non réparables par lot sur un grand nombre de prélèvements. Il s'agit d'une moyenne théorique, pas du nombre imposé dans chaque lot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2,25$ smartphones non réparables par lot, en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous H0, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. Choisir, parmi 0,05, 0,06 et 0,07, la valeur de h arrondie au centième telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Sous H_0, la fréquence suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs s'étend approximativement à 1,96 écarts types de part et d'autre de la moyenne. La demi-largeur recherchée est donc $h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$. Arrondie au centième, elle correspond à l'une des trois propositions données.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Réponse exacte : $h = 0,07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Le test bilatéral au seuil de 5 % conserve, sous H_0, l'intervalle central contenant 95 % des fréquences. Avec la demi-largeur arrondie $h = 0,07$, les bornes sont $0,55 - 0,07 = 0,48$ et $0,55 + 0,07 = 0,62$. On compare la fréquence observée à cet intervalle : une fréquence à l'intérieur conduit à ne pas rejeter l'hypothèse nulle, tandis qu'une fréquence à l'extérieur conduit à la rejeter.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $f \in [0,48\,;\,0,62]$; la rejeter sinon.

Question 3°. Dans l'échantillon de 180 personnes interrogées, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Conclure le test à partir de ces données et de la règle de décision.

La fréquence observée est le nombre de réponses positives divisé par le nombre de personnes interrogées : $f = 76/180 \approx 0,422$. La borne inférieure de l'intervalle de décision est 0,48. Comme la fréquence observée est inférieure à cette borne, elle appartient à la région de rejet du test. Au seuil de 5 %, les résultats conduisent donc à écarter l'hypothèse selon laquelle la proportion vaut 0,55.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 % : les résultats ne confirment pas $p = 0,55$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2018, porte le code MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 3. Les deux exercices portent sur le départ d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence des smartphones. Ils évaluent équations différentielles, fonctions, intégrales, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions d'une équation différentielle linéaire s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions de l'équation homogène associée.
- Le signe de f' détermine les variations de f ; ici, f'(t) représente la vitesse instantanée du wagon en kilomètres par minute.
- Pour une loi binomiale B(n, p), P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^(n-k) et E(X) = np.
- Dans un test bilatéral, comparer la fréquence observée à l'intervalle de décision construit sous H0 permet d'appliquer le seuil de signification.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : t est en minutes, la distance en kilomètres et la vitesse demandée peut nécessiter une conversion.
- Pour une probabilité conditionnelle, distinguer P(T sachant L) de P(L sachant T) et identifier l'événement conditionnant.
- Dans l'algorithme binomial, mettre à jour S à chaque valeur de i et interpréter le résultat comme une probabilité cumulée.
- Pour le test, calculer la fréquence observée, la comparer à l'intervalle de décision et conclure dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer les variations de la distance parcourue par le wagon ?

On étudie le signe de la dérivée f' sur l'intervalle considéré. Lorsque f' est positive, la distance augmente. Dans cet exercice, f' représente aussi la vitesse instantanée, exprimée en kilomètres par minute.

Q : Comment reconnaître la loi binomiale dans la partie sur les smartphones ?

Il y a un nombre fixe de prélèvements, deux issues possibles à chaque prélèvement et une probabilité constante de panne non réparable. Les tirages sont assimilés à des tirages avec remise, ce qui permet d'utiliser une loi binomiale.

Q : Que représente la somme calculée par l'algorithme de la question 3 ?

L'algorithme additionne les probabilités P(X = i) pour i allant de 0 à 3. Sa valeur finale est donc la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables.

Q : Comment conclure le test d'hypothèse au seuil de 5 % ?

On compare la fréquence observée dans l'échantillon à l'intervalle de décision construit sous H0. À l'extérieur de l'intervalle, on rejette H0 ; à l'intérieur, on ne rejette pas H0, sans affirmer qu'elle est prouvée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsabm.fr/assets/annales/bts-abm/E2 - Mathématiques/2018/BTS ABM - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Analyses de Biologie Médicale : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.